Contexte.

Mise au point dans un espace mathématique de dimension trois, la méthode intrinsèque destinée à décomposer (synonyme : diviser) les produits vectoriels déformés du type [**projectile**, **cible**][matrice déformante] a mis en exergue l'importance de la Hessienne de la polynomiale de degré deux Λ(**projectile**) accompagnant chaque décomposition.

Elle a en particulier montré que la valeur de son déterminant, selon qu'il est ou non nul, constitue le critère opérant une classification parmi toutes les Hessiennes.

Concrètement, la nullité du déterminant d'une Hessienne vaut de facto placement dans la classe II de la partie principale de la décomposition dans laquelle elle apparait.

Première motivation justifiant d'approfondir l'étude des noyaux de la classe II.

Le formalisme des parties principales des décompositions de classe I a pu être construit de manière rationnelle et systématique ; de sorte qu'il me semble légitime d'affirmer qu'il est le plus général possible.

En revanche et à ce jour, il n'a été possible de découvrir qu'une seule famille de noyaux pour les décompositions de la classe II.

Il s'agit des tables de Pythagore (synonyme : de multiplication) bâties sur le produit tensoriel classique s'appliquant à n'importe quelle paire de vecteurs pris dans C $\otimes$ E(3, R).

Par ailleurs, la découverte de cette famille relève du pur hasard des investigations que mène tout chercheur.

Si elle trouve en partie son origine dans une étude menée concomitamment sur l'électromagnétisme, notamment sur le tenseur de polarisation de Maxwell, elle ne doit rien à une démarche logique qui en aurait justifié pleinement l'existence.

Seconde motivation justifiant d'approfondir l'étude des noyaux de classe II.

Cela étant su, la lecture de divers travaux consacrés à l'étude de la nullité du déterminant des Hessiennes fournit un second motif à approfondir le sujet.

En effet, dans deux travaux datés respectivement de 1851, [01], et 1859, [02], O. Hesse a émis la proposition selon laquelle les Hessiennes dont les déterminants sont nuls correspondent toujours (sous-entendu : quelle que soit la dimension D de l'espace des discussions) à des hyper-surfaces conoïdales.

Cependant, P. Gordan et M. Noether montrent en 1876 dans [03] que la proposition d'O. Hesse est vraie pour D $\leq$ 3, mais découvrent des contre-exemples pour D $\geq$ 4. Leur travail est réexaminé par R. Permutti en 1957 [04] et 1976 [05] puis par C. Lossen en 2004 [06].

Indépendamment de cette progression, U. Perrazo établit dès 1900 une classification dans P^4, P^5, P^6 des hypersurfaces cubiques dont le déterminant de la Hessienne est nul, [07]. Par ailleurs, A. Franchetta établit en 1954 une classification des hypersurfaces dans P^4 dont le déterminant de la Hessienne est nul, [08].

Un rappel concernant la notion de projection orthogonale.

Soit - pour poursuivre la discussion avec les mêmes acteurs que ceux introduits dans l'exposé de la méthode intrinsèque- V = {C $\otimes$ E(D, R), <..., ...>}, un espace vectoriel de dimension entière D supérieure ou égale à deux ($D \geq 2$) bâti sur le corps commutatif des nombres réels et équipé d'un produit scalaire $\langle \ldots, \ldots \rangle$ euclidien.

Soit, dans V, une cible notée d**x** et un quelconque vecteur **D**.

La réponse à la question « Existe-t-il une décomposition du vecteur **D** prenant la forme d'un élément (p, **z**) de C x E(D, R) tel que : $\mathbf{D} = p.\, d\mathbf{x} + \mathbf{z}$ et $\langle d\mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 0$? » est connue et elle s'énonce comme suit.

Aussi longtemps que le produit scalaire euclidien de la cible par elle-même n'est pas nul[1], $\langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle \neq 0$, il existe une infinité de paires définies de façon générique par $(\langle d\mathbf{x}, \mathbf{D} \rangle / \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle, \mathbf{z})$ permettant de répondre affirmativement.

Ce résultat fait partie des connaissances scolaires de base. La démonstration en est simple et peut être vérifiée dans [09 ; remarque (2.7), p.8]. Je la reproduis ici.

Le fait de décomposer le vecteur **D** en deux parties orthogonales revient à écrire $\mathbf{D} - p.\, d\mathbf{x} = \mathbf{z}$ avec $\langle d\mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 0$. Donc revient à écrire $\langle d\mathbf{x}, \mathbf{D} - p.\, d\mathbf{x} \rangle = 0$. Soit encore, puisque le produit scalaire est bilinéaire : $\langle d\mathbf{x}, \mathbf{D} \rangle = p.\, \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle$. Ainsi, le scalaire p a bien le formalisme annoncé aussi longtemps que $\langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle \neq 0$.

Pour rappel le vecteur p. d**x** s'appelle la projection orthogonale du vecteur **D**.

Mais quel lien y-a-t-il entre ces faits bien connus et la question de la décomposition des vecteurs ?

Un premier lien entre la décomposition des produits vectoriels déformés et la géométrie projective.

Il se trouve que, chaque fois que le réel p permettant de décomposer le vecteur **D** de la manière souhaitée existe, alors cette décomposition s'écrit :

$$\mathbf{D} = (\langle d\mathbf{x}, \mathbf{D} \rangle / \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle).\, d\mathbf{x} + \mathbf{z} \text{ avec } \langle d\mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 0.$$

Or, en passant par la représentation duale des éléments de V, il est très facile de montrer que :

$$(\langle d\mathbf{x}, \mathbf{D} \rangle / \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle).\, | d\mathbf{x} \rangle = (1/\langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle).\, T_2(\otimes)(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}).| \mathbf{D} \rangle.$$

Cela permet donc de reformuler les réponses positives à la question posée sous la forme :

$$| \mathbf{D} \rangle = (1/\langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle).\, T_2(\otimes)(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}).| \mathbf{D} \rangle + | \mathbf{z} \rangle \text{ avec } \langle d\mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 0.$$

Cette réécriture vaut quelle que soit la dimension D supérieure à deux ; donc en particulier lorsque D = 3.

Son formalisme exhibe une similitude avec celui des décompositions proposées dans le cadre de l'étude de la question (E). Dans ce cadre-là, ce formalisme-là coïnciderait avec une formulation très précise de la question (E) s'énonçant ainsi :

« Soit un vecteur d**x** de C ⊗ E(D, R) se comportant comme un neutre à gauche pour le produit de Lie déformé $[\ldots, \ldots]_A$; quel que soit **D**, il permet donc de poser $\mathbf{D} = [d\mathbf{x}, \mathbf{D}]_A$.

[1] *Attention*, comme la discussion implique des vecteurs dont les composantes sont des nombres complexes, le produit scalaire euclidien de deux vecteurs est également un élément de C ; cette remarque vaut pour le carré scalaire $\langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle$ qui ne doit donc pas être confondu avec la norme euclidienne réelle définie pour les éléments de E(D, R) : $||d\mathbf{x}||^2$.

Ce vecteur **D** accepte-t-il alors les décompositions non-triviales (**z**, (1/<d**x**, d**x**>). $T_2(\otimes)$(d**x**, d**x**)) dans C ⊗ E(D, R) x M(D, C) pour lesquelles la partie résiduelle **z** est seulement assujettie à toujours être orthogonale au projectile-neutre d**x** ?»

Zoom sur les espaces de dimension trois.

En première intention, la déclinaison de cette question dans un espace de dimension trois (D = 3) semble *a priori* pouvoir recevoir une réponse positive puisque la table de Pythagore $T_2(\otimes)$(d**x**/<d**x**, d**x**>$^{1/2}$, d**x**/<d**x**, d**x**>$^{1/2}$) impliquant l'élément d**x** de C ⊗ E(3, R) peut tout simplement s'interpréter comme un noyau de classe II dans une ambiance géométrique pseudo-euclidienne ([A] = [J]).

Seul bémol, dans cette ambiance, l'égalité étudiée s'écrit : **D** = d**x** ∧ **D** … et se décompose maintenant en :

$$|\mathbf{D}> = |d\mathbf{x} \wedge \mathbf{D}> = (1/<d\mathbf{x}, d\mathbf{x}>).\ T_2(\otimes)(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}).|\mathbf{D}> + |\mathbf{z}>$$

avec <d**x**, **z**> = 0.

De sorte que dans une discussion sur C ⊗ E(3, R) qui respecterait (*conditionnel*) les propriétés caractérisant habituellement le produit vectoriel classique, cette décomposition ne serait recevable que si, *en plus* des exigences déjà posées, les deux conditions supplémentaires étaient vraies :

$$<d\mathbf{x}, \mathbf{D}> = 0 \text{ et } <\mathbf{D}, \mathbf{D}> = 0$$

Autrement dit, si :

- le vecteur **D** était un spineur d'un espace de dimension trois, [10], et si …
- le neutre à gauche (le projectile d**x** des produits étudiés ici) était orthogonal à ce spineur *et* à la partie résiduelle de cette décomposition non-triviale.

Or, si tel était le cas, les propriétés naturelles des tables de Pythagore livreraient les égalités :

$$\mathbf{D} = d\mathbf{x} \wedge \mathbf{D} = \mathbf{z}$$

… et il serait logique d'en tirer la conclusion que le vecteur/produit-vectoriel **D** ne serait de facto pas vraiment décomposé !

Qu'avons-nous appris ?

1) Il semble exister un lien formel entre certains noyaux de classe II et la notion de projection orthogonale lorsque celle-ci concerne des éléments dans C ⊗ E(D, R).

2) Il semble exister un lien entre les projections orthogonales dans l'espace C ⊗ E(D, R) et la notion de neutre à gauche pour les éléments de l'espace W(D, A) = {C ⊗ E(D, R), <…, …>, […, …]$_A$}.

3) Pour autant, lorsque la discussion se focalise sur C ⊗ E(3, R) (A → [A]) en ambiance pseudo-euclidienne (synonyme : [A] = [J] et la discussion se déroule sur C ⊗ E(D, R)), le vecteur/produit-vectoriel **D** ne peut vraiment se décomposer (tout cours) que si le produit vectoriel classique perd la propriété habituelle d'orthogonalité entre le projectile (ici d**x**) et le résultat du produit (ici **D**) : <d**x**, **D**> ≠ 0.

   Ce fait corrobore la nécessité pour p de ne pas être nul et, par conséquent, l'exigence <d**x**, **D**> ≠ 0 se généralise aux espaces dont la dimension D est quelconque.

   Toujours est-il que ce constat interroge la logique du raisonnement venant d'être tenu :

- Soit le produit vectoriel classique garde ses propriétés habituelles concernant l'orthogonalité en ambiance pseudo-classique mais dans ce cas il ne peut pas y avoir de véritable décomposition ; et donc pas de projection orthogonale.

- Soit il existe une projection orthogonale avec décomposition et le produit vectoriel classique ne peut alors pas garder ses propriétés habituelles concernant l'orthogonalité en ambiance pseudo-classique.

Ce raisonnement met au minimum en évidence une difficulté technique spécifique des discussions souhaitant lier la notion de projection orthogonale et la question (E) sur W(3, [J]).

L'énigme euclidienne

Ce n'est pas la première exploration mettant le doigt sur les difficultés concernant le traitement de la question (E) à la limite euclidienne.

Le document intitulé « PERIAT, T. : Produits vectoriels déformés, spineurs de Cartan et paramétrisation d'Euler, ISBN 978-2-36923-073-1, EAN 9782369230731 du 31 mars 2019, 26 pages » analyse l'élément de longueur riemannien à l'aide de la procédure 3 + 1 et des résultats acquis par la méthode intrinsèque de décomposition des produits vectoriels déformés.

Il démontre l'existence de décompositions non-triviales à la limite euclidienne (Lorsque $[G] \rightarrow Id_3$). Elles ne deviennent acceptables qu'en poussant la discussion en ambiance pseudo-euclidienne et en introduisant la notion de spineurs inventée par E. Cartan.

Une analyse plus poussée de la structure de l'espace W(3, A) permet de montrer que les triades apparaissant à la limite euclidienne constituent une forme particulière d'algèbre de Lie. 4

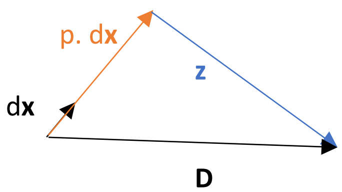
Analyse : la projection orthogonale comme cas particulier de la décomposition orthogonale.

Maintenant, le raisonnement exposé ci-dessus poursuit essentiellement un objectif pédagogique. C'est celui de montrer le lien formel possible entre le traitement de la question (E) et la notion de projection orthogonale.

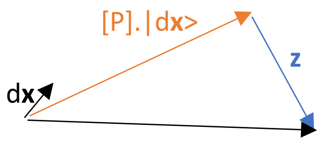
La difficulté technique indéniable accompagnant la limite euclidienne tridimensionnelle invite à élargir le propos initial à des situations un peu moins basiques.

La manière dont la question (E) envisage les décompositions/divisions est sans doute un peu plus sophistiquée que la projection orthogonale en ambiance réelle ne le fait.

D'un côté, le schéma classique de la projection (décomposition) orthogonale en géométrie euclidienne :



De l'autre, la démarche de la question (E) :



D

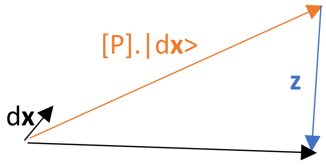
En partant du même vecteur **D** et de la même cible d**x**, il existe bien d'autres façons de réaliser des décompositions (divisions) dont les deux parties restent orthogonales entre elles.

Ces deux figures montrent simplement en quoi *la projection orthogonale classique n'est qu'un cas particulier de décompositions orthogonales*.

Dans le cas général, la condition <d**x**, **z**> = 0 disparait tandis que la condition <[P].|d**x** >, **z** > = 0 subsiste.

Analyse : la décomposition orthogonale comme cas particulier des décompositions.

Poursuivant cette démarche picturale, une troisième figure peut être proposée :



En partant du même vecteur **D** et de la même cible d**x**, il existe encore bien plus de façons de réaliser des décompositions (divisions).

En général, l'orientation relative des deux parties est quelconque et leur orthogonalité ne représente qu'un cas particulier.

Bibliographie.

[01] O. Hesse, Über die Bedingung, unter welche eine homogene ganze Funktion von unabhängigen Variablen durch Lineare Substitutionen von n andern unabhängigen Variablen auf eine homogene Funktion sich zurückführen lässt, die eine Variable weniger enthält, J. reine angew. Math. **42** (1851), 117–124.
[02] O. Hesse, Zur Theorie der ganzen homogenen Funktionen, J. reine angew. Math. **56** (1859), 263–269.
[03] P. Gordan, M. Noether, Über die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet, Math. Ann. **10** (1876), 547–568
[04] R. Permutti, Su certe forme a hessiana indeterminata, Ricerche di Mat. **6** (1957), 3–10.
[05] R. Permutti, Su certe classi di forme a hessiana indeterminata, Ricerche di Mat. **13** (1964), 97–105
[06] C. Lossen, When does the Hessian determinant vanish identically? (On Gordan and Noether's Proof of Hesse's Claim), Bull. Braz. Math. Soc. **35** (2004), 71–82.
[07] U. Perazzo, Sulle varietà cubiche la cui hessiana svanisce identicamente, Giornale di matematiche (Battaglini) **38** (1900), 337–354
[08] A. Franchetta, Sulle forme algebriche di S4 aventi l'hessiana indeterminata, Rend. Mat. **13** (1954), 1–6.
[09] Bröcker, T.: Lineare Algebra und Analytische Geometrie; Grundstudium Mathematik, ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker, zweite, korrigierte Auflage; ISBN 3-7643-7144-7, Copyright © 2004 Birkhäuser Verlag, Postfach 133, CH-4010 Basel, Schweiz, 366 S.
[10] Cartan, E.: The theory of spinors; ISBN 0-486-64070-1, translation of the « Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes) », Hermann, 1937 - 154 p. Dover Publications, Inc. New York © by Hermann, Paris (1966), 157 pages.