Particules idéales, vides de Maxwell et cordes élastiques classiques.

Collection : “La Théorie de la Question (E)” *

©Thierry PERIAT.

22 juillet 2022

©Thierry PERIAT : Particules idéales, vides de Maxwell et cordes élastiques classiques, ISBN 978-2-36923-140-0, EAN 9782369231400, collection “La Théorie de la Question (E)”.

1 Pourquoi s’intéresser aux décompositions des produits vectoriels ?

Ce document expose les raisons justifiant d’étudier les produits vectoriels éventuellement déformés et parfois décomposés non-trivialement. Il le fait au travers de l’introduction de la plus simple mouture de ce concept dans un domaine se situant à l’intersection de deux disciplines physiques : (i) l’électromagnétisme, loin des sources, et (ii) la cosmologie. Il démontre la compatibilité de la démarche avec le concept de filament cosmique au demeurant mis en exergue par certaines simulations du cosmos.

Mots clés : électromagnétisme,espaces vides,cosmologie,filaments cosmiques.

1.1 Analyse de la densité volumique d’énergie dans le vide de Maxwell.

Proposition 1.1. *Les régions assimilables à ce qu’il convient d’appeler des « vides de Maxwell » peuvent être le siège de densités volumiques de forces.*

Il est aisé de parvenir à cette conclusion en introduisant les produits vectoriels classiques (non déformés) décomposés trivialement dans les équations de l’électromagnétisme (EM) établies par J. C. Maxwell en 1865 pour les espaces vides sans source [01]. Une analyse de l’expression trouvée montre qu’elle contient des forces de polarisations exprimées dans l’espace mathématique dual de l’espace vectoriel $C \otimes E(3, R)$.

*La version initiale de ce document date du 5 octobre 2018 et est accessible sur le site zenodo.org depuis le 17 novembre 2019 sous la référence https://doi.org/10.5281/zenodo.3544733.

Démonstration. Je commence cette discussion dans un contexte qui pourrait être celui de la fin du dix-neuvième siècle, avant la publication des travaux d'A. Einstein [02-a et b]. Non que j'en ignore le contenu et les conséquences, mais plus exactement que je souhaite démontrer le côté paradoxal du résultat qui va être atteint.

Le monde de 1865 appuie sa représentation de notre environnement en pratiquant, naturellement et presqu'inconsciemment, une partition de l'espace-temps d'une manière s'apparentant à une démarche qui apparaitra bien plus tard au sein de l'analyse de la théorie de la relativité générale ; elle est dite : ADM [03] ou 3 + 1 [04].

A cette époque, l'espace vide est donc de dimension trois rapporté à une géométrie euclidienne ; il est vide de masse et de charge électrique mais il y existe un champ EM régi par les lois de J. C. Maxwell. Le temps est un simple paramètre précisant la chronologie locale des évènements. La densité volumique d'énergie EM locale est réputée être donnée par la relation [05], [06] :

$$\rho = \frac{1}{2} . (\epsilon_0 . \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} . \mathbf{H}^2) \tag{1}$$

Dans un espace euclidien classique, un certain nombre de concepts mathématiques simples sont connus (dérivations ordinaires, etc.) et il est possible de la réécrire :

$$\rho = \frac{1}{2} . (\epsilon_0 . < \mathbf{E}, \mathbf{E} >_{Id_3} + \frac{1}{\mu_0} . < \mathbf{H}, \mathbf{H} >_{Id_3})$$

en précisant que le symbole $<\ldots, \ldots>_{Id3}$ représente le produit scalaire euclidien qui y est habituellement défini et utilisé. Une dérivation ordinaire par rapport au temps fournit :

$$\frac{d\rho}{dt} = \epsilon_0 . < \mathbf{E}, \frac{d\mathbf{E}}{dt} >_{Id_3} + \frac{1}{\mu_0} . < \mathbf{H}, \frac{d\mathbf{H}}{dt} >_{Id_3}$$

Les lois établies par J. C. Maxwell pour ce genre d'environnement autorisent à pousser la transformation un cran plus loin avec :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\mu_0} . \{< \mathbf{E}, \mathbf{rot_x H} >_{Id_3} - < \mathbf{H}, \mathbf{rot_x E} >_{Id_3}$$

Ce qu'une identité remarquable permet de simplifier en :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} . div_{\mathbf{x}}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} + \mathbf{rot_x X})$$

Le vecteur $\mathbf{X}$ n'a pas, à ce stade, de signification physique bien identifiée ; il apparaît là pour satisfaire une nécessité mathématique et en ne changeant apparemment rien à la discussion puisque la divergence d'un rotationnel est nulle. Pour autant, cette relation définit spontanément une équation de continuité concernant la quantité vectorielle suivante dans laquelle le rotationnel de ce vecteur inconnu n'a aucune raison de disparaitre :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} . (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} + \mathbf{rot_x X}) \tag{2}$$

Le premier terme placé à droite de l'égalité est connu sous le nom de vecteur de Poynting, souvent noté : **S** ; il indique la direction dans laquelle l'energie EM se déplace. A cause de la nécessaire cohérence des unités physiques impliquées dans cette relation, le rotationnel du vecteur **X** correspond forcément à un certain type de courant énergétique dont la nature échappe pour l'instant à notre compréhension.

Quoiqu'il en soit, le contexte initial de cette démonstration a permis de définir une équation de continuité :

$$\frac{d\rho}{dt} = -div(\mathbf{J}) \tag{3}$$

Le terme de droite dans la relation précédente est la limite du flux de la grandeur vectorielle **J** sortant de la surface entourant n'importe quel point P de l'espace vide étudié ici, lorsque le volume limité par cette surface tend vers zéro. Le terme de gauche donne la variation de densité volumique d'énergie EM au point P au cours du temps lorsque celle-ci est mesurée sur un intervalle de temps tendant vers zéro. L'équation prise dans sa globalité peut se laisser interpréter comme une équation de continuité relative à la grandeur physique ρ définie en P.

Je continue maintenant le travail en dérivant l'expression du courant EM obtenu précédemment par rapport au temps :

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{1}{\mu_0}.(\frac{d\mathbf{E}}{dt} \wedge \mathbf{H} + \mathbf{E} \wedge \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \frac{d\mathbf{rot_x X}}{dt})$$

J'y réinjecte une fois de plus les équations de Maxwell définies dans le vide pour obtenir :

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0 . \mu_0^2}.\mathbf{rot_x H} \wedge \mathbf{H} - \frac{1}{\mu_0}.\mathbf{E} \wedge \mathbf{rot_x E} + \frac{1}{\mu_0}.\frac{d\mathbf{rot_x X}}{dt}$$

Mettant à profit l'isomorphisme mathématique existant entre les espaces vectoriels C $\otimes$ E(3, R) et C $\otimes$ E*(3, R), je réécris cette relation vectorielle dans l'espace dual en utilisant les notations symboliques dûes à Dirac [1] :

$$|\frac{d\mathbf{J}}{dt}> = \frac{1}{\epsilon_0 . \mu_0^2}.|\mathbf{rot_x H} \wedge \mathbf{H}> + \frac{1}{\mu_0}.|\mathbf{rot_x E} \wedge \mathbf{E}> + \frac{1}{\mu_0}.|\frac{d\mathbf{rot_x X}}{dt}>$$

En utilisant à cet endroit précis l'état d'esprit caractérisant la théorie que je développe (voir les données élémentaires dans [a] puis les méthodes de décomposition dans [b] et [c]), il est d'abord possible de remarquer que le produit vectoriel classique est équivalent à un produit de Lie déformé défini dans un espace mathématique de dimension trois et bâti sur le cube des composantes du tenseur de rang trois complètement antisymétrique. Ce cube se laisse synthétiser en une matrice [J] telle que :

$$[J] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Elles sont couramment employées en mécanique quantique.

Il est ensuite facile de montrer grâce à l'isomorphisme :

$$\mathbf{q}_1 \in E(3,\, C) \rightarrow \left| \begin{array}{c} {}_1q^1 \\ {}_1q^2 \\ {}_1q^3 \end{array} \right\rangle \in C^3 \rightarrow {}_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_1) \,=\, \begin{bmatrix} 0 & -{}_1q^3 & {}_1q^2 \\ {}_1q^3 & 0 & -{}_1q^1 \\ -{}_1q^2 & {}_1q^1 & 0 \end{bmatrix}$$

que la plus triviale des décompositions d'un produit vectoriel classique se laisse représenter par une matrice que je nommerai par la suite de type Φ et que :

$$|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2 >\,=\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_1)\,.\,|\mathbf{q}_2 >$$

L'application de ces considérations très générale au contexte physique examiné ici fournit :

$$|\frac{d\mathbf{J}}{dt} >\,=\, \frac{1}{\epsilon_0\,.\,\mu_0^2}\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{rot_x H})\,.\,|\mathbf{H} >\,+\,\frac{1}{\mu_0}\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{rot_x E})\,.\,|\mathbf{E} >\,+\,\frac{1}{\mu_0}\,.\,|\frac{d\mathbf{rot_x X}}{dt} > \tag{4}$$

Définition 1.1. *Jacobiennes.*

J'introduis ici un ensemble de tables de Pythagore particulières bâties sur la composition des fonctions, le gradient classique d'une fonction et les composantes d'un quelconque vecteur :

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{a}},\, \mathbf{b}) \,=\, \begin{bmatrix} \frac{\partial b^1}{\partial a^1} & \frac{\partial b^1}{\partial a^2} & \frac{\partial b^1}{\partial a^3} \\ \frac{\partial b^2}{\partial a^1} & \frac{\partial b^2}{\partial a^2} & \frac{\partial b^2}{\partial a^3} \\ \frac{\partial b^3}{\partial a^1} & \frac{\partial b^3}{\partial a^2} & \frac{\partial b^3}{\partial a^3} \end{bmatrix}$$

et j'en profite pour remarquer deux propriétés simples de ces tables :

$$Trace\{T_2(o)(\partial_{\mathbf{a}},\, \mathbf{b})\} \,=\, div_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$$

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{a}},\, \mathbf{b}) \,-\, T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{a}},\, \mathbf{b}) \,=\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{rot_a b})$$

L'injection de ces informations généralistes dans le cadre de la démonstration en cours fournit alors :

$$\begin{gathered} |\frac{d\mathbf{J}}{dt} > \\ = \\ \frac{1}{\epsilon_0\,.\,\mu_0^2}\,.\,\{T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\, \mathbf{H}) \,-\, T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{x}},\, \mathbf{H})\}\,.\,|\mathbf{H} > \\ + \\ \frac{1}{\mu_0}\,.\,\{T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\, \mathbf{E}) \,-\, T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{x}},\, \mathbf{E})\}\,.\,|\mathbf{E} > \\ + \\ \frac{1}{\mu_0}\,.\,|\frac{d\mathbf{rot_x X}}{dt} > \end{gathered} \tag{5}$$

En tenant compte de la relation bien connue liant permittivité électrique, perméabilité magnétique et vitesse de la lumière dans le vide :

$$\epsilon_0\,.\,\mu_0\,.\,c^2 \,=\, 1 \tag{6}$$

et du fait qu'il est aisé de démontrer à partir des dérivations partielles de l'Equ.(1) :

$$\partial_{\mathbf{x}}\rho = \epsilon_0 \, . \, T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \, \mathbf{E}) \, . \, |\mathbf{E} > + \frac{1}{\mu_0} \, . \, T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \, \mathbf{H}) \, . \, |\mathbf{H} > \tag{7}$$

La démonstration s'achève sur une expression dont l'analyse des unités physiques y étant impliquées montre qu'elle décrit une densité volumique de force dont les deux premiers termes s'identifient facilement à une polarisation électromagnétique du vide :

$$\begin{gathered} |\frac{d\mathbf{F}}{d\tau} > \\ = \\ \frac{1}{c^2} \, . \, |\frac{d\mathbf{J}}{dt} > \\ = \\ \underbrace{\epsilon_0 \, . \, T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \, \mathbf{E}) \, . \, |\mathbf{E} > + \frac{1}{\mu_0} \, . \, T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \, \mathbf{H}) \, . \, |\mathbf{H} >}_{Polarisation\,EM} - \partial_{\mathbf{x}}\rho + \epsilon_0 \, . \, |\frac{d\mathbf{rot_x X}}{dt} > \end{gathered} \tag{8}$$

□

Je viens de démontrer qu'en absence de sources matérielles (masses) et électromagnétiques (charges), dans les conditions caractérisant les espaces temps vides tels que ceux-ci pouvaient être conçus à la fin du dix-neuvième siècle par J. C. Maxwell et ses contemporrains, il peut exister une densité volumique (tridimensionnelle) de force non-nécessairement nulle.

Remarque 1.1. *Commentaires.*

Sur le plan technique, cette force apparaît essentiellement grâce à l'usage de :

1. l'expression admise pour la densité volumique d'énergie EM dans le vide : Equ.(1) ;
2. l'usage de dérivations partielles ou ordinaires ;
3. l'utilisation des équations de J. C. Maxwell ;
4. l'introduction de la notion de décomposition triviale d'un produit vectoriel dans l'espace dual C ⊗ E*(3, R).

Cette force exhibe trois composantes :

1. une force de polarisation électromagnétique :

$$\epsilon_0 \, . \, T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \, \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} \, . \, T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \, \mathbf{H})$$

   L'explication de son existence dans une région supposée vide de sources doit se chercher du côté des conséquences d'un phénomène lointain et la tentation est donc grande de vouloir y reconnaitre la signature du fond diffus cosmologique (le CMB des anglo-saxons).

Une de ses nombreuses composantes est mesurée une première fois en 1941 par Andrew MacKellar [15 ; p. 131] et (re)découverte expérimentalement [2] par hasard en 1964 grâce à l'usage d'un radiomètre par les physiciens américains Arno Allan Panzias et Robert Woodrow Wilson ; ce qui a valu à ces derniers le prix Nobel de physique en 1978.

Une connaissance complète de ce fond diffus exige le recencement et l'étude de toutes les autres composantes (du spectre électromagnétique et gravitationnel). Les projets BAO (étude des oscillations acoustiques), COBE et WMAP ont permis de mieux interpréter les signaux qui nous parviennent ; en particulier, de repérer des anisotropies : (Smoot et al. 1992), [16 ; §6.3].

2. un gradient spatial de la densité volumique d'énergie EM :

$$-\partial_{\mathbf{x}}\rho$$

   (a) Connaissant la relation d'équivalence "masse - énergie" établie à partir des considérations de la relativité restreinte [07],
   (b) sachant que l'énergie a une tendance naturelle à se dégrader au cours des processus physiques (augmentation de l'entropie et pertes par divers processus : freinage, dissipation, échanges, etc.),
   (c) prenant en considération le principe de Mach [14 ; p. 4],

   sa présence dans l'Equ.(8) a peut-être un lien avec l'ensemble des interférences entre champs et particules se déroulant dans l'univers.

3. une force dont l'interprétation physique est encore incertaine découlant des dérivations partielles par rapport au temps d'un rotationnel (tenseur tourbillon) :

$$\epsilon_0 \cdot \frac{d\mathbf{rot_x X}}{dt}$$

La démarche technique mise en œuvre peut se généraliser en ce sens que le produit vectoriel classique pourrait être déformé et que les décompositions de celui-ci pourraient être non-triviales. Pour cette raison, je pars du principe que ces densités volumiques de force existent dans les régions en moyenne vides de l'univers.

1.2 Un lien plausible avec l'existence de filaments cosmiques.

J'ai écrit ce qui suit pour la première fois en 2004. Les ondes gravitationnelles et les trous noirs faisaient encore partie du bagage spéculatif résultant des travaux initiés par A. Einstein. Pour autant, les premiers filaments cosmiques avaient été détectés au milieu des années soixante-dix [3][08 ; p. 2].

2. Voir la très intéressante progression des idées et des expériences ayant mené à un consensus sur l'existence de ce fond ; par exemple dans les présentations pédagogiques proposées sur Wikipédia.

3. Pour la petite histoire, j'ai passé mon Baccalauréat C en 1974.

Une force de polarisation est une force qui apparaît du fait de la présence d'une différence de potentiel ou qui, inversement, tend naturellement à détruire un état neutre pour faire apparaitre une différence de potentiel.

Je vais admettre que la force de polarisation mise en évidence par les calculs précédents, voir l'Equ.(8), agit comme le ferait une tension sur un bout de corde parce que je pars de l'a priori maintenant confirmé par la découverte de l'existence effective de l'effet Lense-Thirring [09] et des ondes gravitationnelles [09-d], [10], que la structure géométrique en chaque point P de l'espace est dotée d'une sorte d'élasticité potentielle.

Je vais donc avancer l'idée que chaque point P de l'espace vide de Maxwell, à cause de l'expansion connue de l'univers, est une des extrémités d'un bout de corde élastique fictif de longueur nulle ($L(t = 0) = 0$) à un instant initial. Et je vais admettre qu'une interaction lointaine agit sur ce point comme si elle voulait et pouvait exprimer l'élasticité potentielle locale de la structure géométrique en ce point. C'est-à-dire que j'accepte de me représenter cette interaction comme une action qui serait capable de modifier les longueurs en P ; et donc pourrait faire apparaitre un bout infinitésimal de corde.

Si ce scénario choque l'académie, je la prie de m'excuser mais également de considérer la découverte très récente du fait que notre univers est en expansion accélérée et que personne, à ce jour et à mon humble connaissance, ne semble avoir été en mesure d'en donner une explication persuasive. J'apporterai pour ma défense le fait que de jeunes chercheurs se posent eux aussi depuis quelques petites années la question de savoir si la cosmologie peut servir de laboratoire pour la théorie des cordes [11] pendant que d'autres en sont déjà à écrire les équations décrivant les cordes cosmiques [12], [13] ?

Remarque 1.2. *Intérêt de la notion de surface en évolution.*

Je pose donc que la densité de force trouvée précédemment, voir Equ.(8), génère une tension linéaire, **T**, qui pourrait éventuellement être prise en compte pour expliquer l'expansion de l'univers et les variations d'intensité de cette expansion :

$$\mathbf{T} = S \, . \, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} \tag{9}$$

S désigne ici un élément de surface entourant le point P dont le comportement est étudié.

Je vais ensuite parier que les évolutions de cette tension linéaire au cours du temps suivent une relation justifiée par le raisonnement heuristique suivant :

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} \tag{10}$$

$$=$$

Force linéaire par unité de temps.

=

Densité volumique de force par unité de surface par unité de temps.

=

(Densité volumique de force par unité de longueur) par (longueur par unité de temps).

=

(Circulation de la force par unité de volume) par (vitesse).

=

pression par vitesse.

=

$$p\,.\,\mathbf{u}$$

Soit maintenant le calcul de la dérivée ordinaire par rapport au temps de cette relation heuristique :

$$\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t} \;=\; \frac{dp}{dt}\,.\,\mathbf{u} \,+\, p\,.\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{11}$$

Quelques rappels pédagogiques : Il n'est peut-être pas inutile de rappeler la définition de la pression exercée en un point P d'une surface S non nulle par une force $\mathbf{F}$:

$$p \;=\; \frac{1}{S}\,.\,<\mathbf{F},\,\mathbf{n}>_{Id_3}$$

Le vecteur $\mathbf{n}$ désigne la normale unitaire (de norme égale à un) au point P. A partir de là, rien ne change en multipliant cette formule par un :

$$p \;=\; \frac{1}{\underbrace{S\,.\,L}_{volume}}\,.\,\underbrace{<\mathbf{F},\,L\,.\,\mathbf{n}>_{Id_3}}_{Travail\,de\,la\,force}$$

Le dénominateur du terme placé à droite du signe de l'égalité représente le volume dessiné par le déplacement L (L $\neq$ 0) de la surface S. Le produit scalaire situé du même côté symbolise le travail accompagnant la circulation de la force $\mathbf{F}$ au cours de ce déplacement. Partant de là et remplaçant la force par une densité volumique de force, je peux admettre que l'existence d'une différence de pression décrite par la relation :

$$dp \;=<\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\tau},\,d\mathbf{x}>_{Id_3} \tag{12}$$

L'injection de cette relation d'équilibre dans l'Equ.(11) fournit :

$$\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t} \;=<\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\tau},\,\mathbf{u}>_{Id_3}\;.\,\mathbf{u} \,+\, p\,.\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{13}$$

En général, dans les espaces euclidiens tridimensionnels classiques, la formule suivante s'applique :

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = <\mathbf{a},\, \mathbf{c}>_{Id_3} .\, \mathbf{b} - <\mathbf{a},\, \mathbf{b}>_{Id_3} .\, \mathbf{c}$$

Lorsqu'en particulier $\mathbf{a} = \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) = <\mathbf{a},\, \mathbf{c}>_{Id_3} .\, \mathbf{a} - <\mathbf{a},\, \mathbf{a}>_{Id_3} .\, \mathbf{c}$$

L'application de ce résultat particulier à l'Equ.(13) donne (nota bene : le produit scalaire est commutatif.) :

$$\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t} = \mathbf{u}^2 .\, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} + \mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau}) + p .\, \frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{14}$$

Je projette cette relation dans l'espace dual et j'écris :

$$|\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t}> = \mathbf{u}^2 .\, |\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau}> + |\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau})> + p .\, |\frac{d\mathbf{u}}{dt}>$$

J'utilise à nouveau l'hypothèse intuitive selon laquelle, dans le vide de Maxwell, les décompositions des produits vectoriels classiques sont a priori de la forme la plus triviale :

$$|\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t}> = \mathbf{u}^2 .\, |\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau}> + |_{[J]}\Phi(\mathbf{u}) .\, (_{[J]}\Phi(\mathbf{u}) .\, |\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau}>)> + p .\, |\frac{d\mathbf{u}}{dt}>$$

Puisque les mathématiques de cette discussion se réalisent sur un corps commutatif de caractéristique différente de deux et que :

$$_{[J]}\Phi^2(\mathbf{u}) = T_2(\otimes)(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) - \mathbf{u}^2 .\, Id_3$$

Il suit :

$$|\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t}> = T_2(\otimes)(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) .\, |\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau}> + p .\, |\frac{d\mathbf{u}}{dt}>$$

A cause du formalisme classique des forces (voir la loi de Newton et la version relativiste de ce concept - la masse varie avec la vitesse [07 ; p. 261, [10.3.5]]), je suppose qu'il existe un scalaire ρ^* non nul jouant *grosso modo* le rôle d'une densité volumique pondérée de masse tel que :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} = \rho^* .\, \frac{d\mathbf{u}}{dt} \; ; \; k \neq 0 \tag{15}$$

Son utilisation dans la relation précédente la transforme en :

$$|\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t}> = \{\rho^* .\, T_2(\otimes)(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + p .\, Id_3\} .\, |\frac{d\mathbf{u}}{dt}>$$

Les situations physiques qui annulent la dérivée seconde par rapport au temps de la tension linéaire se traduisent par :

$$\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t} = \mathbf{0} \Rightarrow \{\rho^* .\, T_2(\otimes)(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + p .\, Id_3\} .\, |\frac{d\mathbf{u}}{dt}> = |\mathbf{0}>$$

Ces situations se répartissent en deux classes :

— **Classe 1** : L'accélération locale est nulle : le phénomène physique étudié se déplace à vitesse constante ;
— **Classe 2** : Quelle que soit l'accélération locale, la matrice entre parenthèses est dégénérée ; ceci implique :

$$|\rho^* \,.\, T_2(\otimes)(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) \,+\, p \,.\, Id_3| \,=\, 0$$

Le ratio (-p/ρ^*) est une valeur propre de la table de Pythagore. Un petit calcul prouve que :

$$|T_2(\otimes)(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) \,-\, (-\frac{p}{\rho^*}) \,.\, Id_3| \,=\, -(\frac{p}{\rho^*})^2 \,.\, \{(-\frac{p}{\rho^*}) \,-\, \mathbf{u}^2)$$

Il révèle que la classe des situations dégénérées contient deux sous-classes :
— **Sous-classe 2.1 :** Celle pour laquelle la pression est nulle (p = 0), ce qui sous-entend que le phénomène étudié n'exerce pas de pression ;
— **Sous-classe 2.2 :** Celle pour laquelle il existe une *équation d'état* du genre :

$$p \,+\, \rho^* \,.\, \mathbf{u}^2 \,=\, 0 \tag{16}$$

Ces situations englobent un ensemble d'équations d'état décrivant les divers types de courant énergétiques parcourant les régions vides de l'espace :
— Pour la cohérence des unités physiques et pour intégrer la relation d'équivalence entre masse et énergie, le scalaire ρ^* doit être proportionnel à la densité volumique d'énergie (ce qui avait été formellement souhaité en écrivant l'Equ.(15)) :

$$\rho^* \,=\, \frac{\rho}{c^2} \tag{17}$$

Les équations d'état sont donc du genre :

$$p \,+\, \rho \,.\, \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \,=\, 0$$

Lorsque le courant énergétique se propage à une vitesse **u** dont l'intensité égale celle de la lumière dans le vide, alors u = c et cette approche théorique mêlant électromagnétisme classique et étude des cordes en élongation livre une équation d'état bien précise :

$$p \,+\, \rho \,=\, 0$$

qui est la relation attendue pour les régions vides de l'espace-temps [15 ; p. 113 : la composante quantique], [17 ; Equ.(8)].

Le raisonnement mené jusqu'à présent montre que la notion de surface mûe par une force de polarisation est compatible avec l'existence d'un sous-ensemble de situations caractérisées par l'existence d'équations d'état décrivant chacune un type de fluide parfait [–]. Une section de surface en évolution décrit forcément une sorte de forme tubulaire au cours du temps et évoque la notion de filament.

Remarque 1.3. *Une autre expression pour la dérivée seconde de la tension linéaire.*

Parallèlement à ces considérations, et puisque qu'une section de surface peut elle aussi évoluer, je réalise une dérivation ordinaire par rapport au temps de l'Equ.(9) ; elle fournit :

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{dS}{dt} . \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} + S . \frac{d\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau}}{dt} \tag{18}$$

Et une seconde dérivation ordinaire par rapport au temps :

$$\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t} = \frac{d^2S}{d^2t} . \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} + 2 . \frac{dS}{dt} . \frac{d\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau}}{dt} + S . \frac{d^2\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau}}{d^2t} \tag{19}$$

Exemple 1.1. *Le cas d'une densité volumique de force invariante.*

Pour la pédagogie, je considère maintenant le cas d'une densité volumique de force contante dans l'espace :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} = \mathbf{c^{te}} \tag{20}$$

Les démarches précédentes apportent deux expressions distinctes pour la dérivée seconde par rapport au temps de la tension linéaire $\mathbf{T}$:

$$\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t} = \frac{d^2S}{d^2t} . \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} = T_2(\otimes)(\mathbf{u}, \mathbf{u}) . |\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} > + p . |\frac{d\mathbf{u}}{dt} > \tag{21}$$

Le raisonnement initié et expliqué au niveau de la remarque 1.2 peut être réitéré. Il permet de montrer que les variations secondes par rapport au temps de la surface S modifie les valeurs propres de la table de Pythagore :

$$-\frac{p}{k} \rightarrow (-\frac{p}{k})_{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} = \mathbf{c^{te}}} = -\frac{p}{k} + \frac{d^2S}{d^2t} \tag{22}$$

De sorte que les situations de la sous-classe 2.2 sont cette fois-ci associées avec des équations d'état du genre :

$$-(-\frac{p}{\rho^*} + \frac{d^2S}{d^2t})^2 . \{-\frac{p}{\rho^*} + \frac{d^2S}{d^2t} - \mathbf{u}^2) = 0$$

qui se répartissent elle-même en deux catégories décrites par les relations ci-dessous :

$$\frac{p}{\rho^*} = \frac{d^2S}{d^2t} \tag{23}$$

$$-\frac{p}{\rho^*} + \frac{d^2S}{d^2t} - \mathbf{u}^2 = 0$$

...

2 Polarisations et filaments cosmiques.

Il n'y a aucune raison valable de croire que la densité volumique de force découverte ci-dessus, voir l'Equ-(8) une fois de plus, soit constante partout et au cours du temps. Il semble au contraire raisonnable d'envisager que ce vecteur a des orientations et des intensités (normes) erratiques (chaotiques) variant au grès de l'activité céleste. Ce constat justifie de reprendre les calculs réalisés au cours de la section précédente et d'en explorer le maximum de conséquences.

Les Equ.(11) et (12) :

$$\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t} = \frac{dp}{dt}.\,\mathbf{u} + p.\,\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

fournissent d'abord :

$$\frac{d(\frac{d\mathbf{T}}{dt})}{dt} = \frac{d(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau}\,.\,d\mathbf{x})}{dt}.\,\mathbf{u} + p.\,\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{d(\frac{d\mathbf{T}}{dt})}{dt} = (\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau}\,.\,\mathbf{u})\,.\,\mathbf{u} + p\,.\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\frac{d(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau})}{dt}\,.\,d\mathbf{x}).\,\mathbf{u}$$

Il faut remarquer la présence d'un terme supplémentaire (le dernier à droite du signe de l'égalité) par rapport à l'Equ.(13). A partir d'ici et pour alléger un peu l'écriture je vais poser :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \tau} = \mathbf{f} \tag{24}$$

Ce choix permet d'écrire :

$$\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t} = (\mathbf{f}\,.\,\mathbf{u})\,.\,\mathbf{u} + p\,.\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\frac{d\mathbf{f}}{dt}\,.\,d\mathbf{x}).\,\mathbf{u} \tag{25}$$

Autre exemple important, l'Equ.(10) :

$$\mathbf{T} = S.\,\mathbf{f}$$

dont les dérivées ordinaires successives s'écrivent :

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{dS}{dt}.\,\mathbf{f} + S.\,\frac{d\mathbf{f}}{dt} \tag{26}$$

et :

$$\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t} = \frac{d^2S}{d^2t}.\,\mathbf{f} + 2.\,\frac{dS}{dt}.\,\frac{d\mathbf{f}}{dt} + S.\,\frac{d^2\mathbf{f}}{d^2t} \tag{27}$$

Tous ces préalables ayant été faits, chacune de ces dérivées ordinaires exhibe deux visages et il serait jusdicieux de comparer d'une part les Equ.(10) et (26) :

$$p\,.\,\mathbf{u} = \frac{dS}{dt}.\,\mathbf{f} + S.\,\frac{d\mathbf{f}}{dt} \tag{28}$$

et d'autre part les Equ.(25) et (27) :

$$(\mathbf{f}\,.\,\mathbf{u})\,.\,\mathbf{u} + p\,.\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\frac{d\mathbf{f}}{dt}\,.\,d\mathbf{x}).\,\mathbf{u} = \frac{d^2S}{d^2t}.\,\mathbf{f} + 2.\,\frac{dS}{dt}.\,\frac{d\mathbf{f}}{dt} + S.\,\frac{d^2\mathbf{f}}{d^2t} \tag{29}$$

Des confrontations *terme à terme* au niveau des dérivées ordinaires de la densité volumique de force ne semblent pas possible ; le formalisme de ces relations invite à préférer des comparaisons au niveau de la vitesse et de ses dérivées ordinaires successives. Pour y parvenir, il faut à nouveau invoquer l'Equ.(15) :

$$\mathbf{f} = \rho^* \, . \, \frac{d\mathbf{u}}{dt} \; ; \; \rho^* \neq 0$$

qui permet de trouver :

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{d\rho^*}{dt} \, . \, \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \rho^* \, . \, \frac{d^2\mathbf{u}}{d^2t} \tag{30}$$

et :

$$\frac{d^2\mathbf{f}}{d^2t} = \frac{d^2\rho^*}{d^2t} \, . \, \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2 \, . \, \frac{d\rho^*}{dt} \, . \, \frac{d^2\mathbf{u}}{d^2t} + \rho^* \, . \, \frac{d^3\mathbf{u}}{d^3t} \tag{31}$$

Remarque 2.1. *Sur la relation d'équivalence "masse - énergie".*

Comme indiqué plus haut, l'Equ.(17) tente de traduire la densité volumique de force apparue dans l'Equ.(8) en utilisant la conception de la force prônée par l'approche de la relativité restreinte. Une approche relativiste de la notion de force par unité de volume autorise aussi à poser :

$$\mathbf{f} \tag{32}$$

$$= \frac{\partial \frac{d(m \, . \, \mathbf{u})}{dt}}{\partial \tau} = \frac{\partial \{ \frac{dm}{dt} \, . \, \mathbf{u} + m \, . \, \frac{d\mathbf{u}}{dt}) \}}{\partial \tau} = \frac{\partial \frac{dm}{dt}}{\partial \tau} \, . \, \mathbf{u} + \frac{dm}{dt} \, . \, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \frac{dm}{dt} \, . \, \frac{d\mathbf{u}}{dt} + m \, . \, \frac{\partial \frac{d\mathbf{u}}{dt}}{\partial \tau}$$

J'ai indiqué au démarrage de ce document que (i) les équations de Maxwell pour l'électromagnétisme alliées à (ii) l'usage d'une projection triviale dans l'espace dual permettaient de trouver une équation de continuité concernant la densité volumique d'énergie EM, voir Equ.(3). A cause de l'Equ.(17), si la densité volumique d'énergie se conserve, alors la densité volumique de masse équivalente aussi.

Cette idée a été utilisée un certain nombre d'années pour décrire le comportement des noyaux [18 ; p. 26, (1.7) : $\rho^* = 0{,}17 \text{ fm}^{-3}$]. Des mesures plus fines et plus récentes montrent que cette invariance de la densité volumique de masse d'un noyau n'est qu'une approximation.

En mécanique relativiste, la masse varie en fonction de l'intensité de la vitesse. L'equ.(32) doit donc s'utiliser avec précaution en fonction des conditions physiques examinées.

Remarque 2.2. *Confrontation des dérivées de la tension linéaire.*

Indépendamment des propos tenus ci-avant, je vais tenter de confronter entre elles les expressions équivalentes des dérivées ordianaires successives de la tension linéaire. J'injecte donc les Equ.(15), (30) et (31) dans les Equ.(28) et (29) pour trouver :

1. Concernant la dérivée ordinaire du premier ordre :

$$Equ.(28) \;\Rightarrow\; -p\,.\,\mathbf{u} + \frac{1}{c^2}\,.\,\frac{d(\rho\,.\,S)}{dt}\,.\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{\rho}{c^2}\,.\,\frac{d^2\mathbf{u}}{d^2t} = \mathbf{0} \tag{33}$$

2. Le traitement de la dérivée du second ordre, l'Equ.(29), est un peu plus délicat à cause des termes placés à gauche du signe de l'égalité. Je vais donc d'abord écrire ceux placés à droite de ce signe :

$$\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t} \tag{34}$$
$$=$$
$$\frac{d^2(\rho^*\,.\,S)}{d^2t}\,.\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d(\rho^*\,.\,S)}{dt}\,.\,\frac{d^2\mathbf{u}}{d^2t} + \rho^*\,.\,\frac{d^3\mathbf{u}}{d^3t}$$

Quant aux termes placés à gauche, les deux premiers sont déjà connus et il permettent d'écrire après projection triviale dans l'espace dual :

$$|\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t}> = T_2(\otimes)(\mathbf{u},\,\mathbf{u})\,.\,|\mathbf{f}> + p\,.\,|\frac{d\mathbf{u}}{dt}> + |(\frac{d\mathbf{f}}{dt}.\,d\mathbf{x}).\,\mathbf{u}>$$

Concernant le dernier terme, en utilisant le même raisonnement qu'au cours de la remarque 1.2, voir pour modèle le passage menant à l'Equ.(14) :

$$dt\,.\,|(\frac{d\mathbf{f}}{dt}\,.\,\mathbf{u}).\,\mathbf{u}> = dt\,.\,|\mathbf{u}^2\,.\,\frac{d\mathbf{f}}{dt} + \mathbf{u}\wedge(\mathbf{u}\wedge\frac{d\mathbf{f}}{dt})> = dt\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{u},\,\mathbf{u})\,.\,|\frac{d\mathbf{f}}{dt}>$$

Par conséquent les termes placés à droite du signe de l'égalité dans l'Equ.(29) se résument à :

$$|\frac{d^2\mathbf{T}}{d^2t}> = T_2(\otimes)(\mathbf{u},\,\mathbf{u})\,.\,|\mathbf{f} + dt\,.\,\frac{d\mathbf{f}}{dt}> + p\,.\,|\frac{d\mathbf{u}}{dt}> \tag{35}$$

Ce qui permet d'écrire in fine :

$$Equ.(29)$$
$$\Downarrow$$
$$T_2(\otimes)(\mathbf{u},\,\mathbf{u})\,.\,|(\rho^* + d\rho^*)\,.\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \rho^*\,.\,\frac{d^2\mathbf{u}}{d^2t}> + p\,.\,|\frac{d\mathbf{u}}{dt}> \tag{36}$$
$$=$$
$$|\frac{d^2(\rho^*\,.\,S)}{d^2t}\,.\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d(\rho^*\,.\,S)}{dt}\,.\,\frac{d^2\mathbf{u}}{d^2t} + \rho^*\,.\,\frac{d^3\mathbf{u}}{d^3t}>$$

Ce qui impose désormais de trouver les solutions des Equ.(33) et (36) et de se poser la question de savoir comment les exploiter.

Remarque 2.3. *Solutions au niveau des dérivées d'ordre un de la tension linéaire.*

C'est visiblement une équation différentielle du second degré écrite en fonction des dérivées ordinaires successives de la vitesse **u** et dont les coefficients de degré (0, 1, 2) sont respectivement :
— (i) moins la pression,
— (ii) la dérivée ordinaire par rapport au temps de la masse linéaire et
— (iii) la densité volumique de masse équivalente.

Exemple 2.1. *Flux linéaire.*

En admettant que pour quelques instants le flux énergétique soit suffisamment linéaire pour qu'il soit correct de projeter l'Equ.(33) sur un seul axe arbitrairement choisi, il vient :

$$-p\,.\,u\,+\,\frac{1}{c^2}\,.\,\frac{d(\rho\,.\,S)}{dt}\,.\,\frac{du}{dt}\,+\,\frac{\rho}{c^2}\,.\,\frac{d^2u}{d^2t}\,=\,0 \tag{37}$$

Ce type de relation se résoud très classiquement et facilement si les conditions initiales sont connues en posant par exemple :

$$u\,=\,u_{0+}\,.\,e^{\omega\,.\,t}\,+\,u_{0-}\,.\,e^{-\omega\,.\,t}$$

Remarque 2.4. *Principes.*

La discussion amorçée dans ce document se place au niveau des concepts et elle contient à cause de celà d'innombrables illustrations pratiques dans les détails desquelles je ne souhaite pas encore rentrer.

Au lieu de celà je m'appuierai sur mon investigation [d] cherchant à donner la forme générale d'une corde élastique soumise à deux interactions essentielles : (i) une tension linéaire et (ii) un champ de gravitation. En même temps, j'ai l'intention de poursuivre cette discussion en me basant sur deux principes :

1. Le premier est emprûnté à la mécanique quantique : "L'espace des positions, **x**, et celui des vitesses, **u**, sont deux espaces corrélés entre eux par le biais du principe d'incertitude dû à W. Heisenberg".
2. Le second est le fruit de l'observation et s'énonce ainsi : "Aussi petit soit-il, il existe partout et tout le temps dans l'univers un champ de rappel (pseudo-newtonnien) permettant d'écrire localement avec une plus ou moins bonne approximation :"

$$\exists\,k\,\in\,R\,:\,\frac{d\mathbf{u}}{dt}\,=\,k\,.\,\mathbf{x}$$

3 Conclusion

Ce document est une version modernisée d'un document écrit et déposé sur zenodo.org en 2018. Ce dernier est lui-même la version française de mon travail original écrit en anglais et intitulé *vacuums and strings.*

Le but mathématique poursuivi par cet exposé, sans aucun doute incomplet, est de justifier la nécessité d'étudier la théorie se préoccupant de déformer des produits tensoriels puis d'en analyser les décompositions. Il le fait au travers de deux applications physiques pertinentes pour la progression de nos connaissances sur le cosmos en utilisant la mouture la plus simple de la théorie mathématique sous-jacente.

Après avoir prouvé l'existence d'un champ de force dans les régions vides de l'espace régies par les lois de J. C. Maxwell, il démontre que l'évolution de surfaces soumises à ce champ est compatible avec la définition d'équations d'état pour les régions vides concernées et l'ensemble de celles-ci englobe la relation : "la somme de la pression et de la densité volumique d'énergie est nulle ($p + \rho = 0$)" présumée être celle des régions vides de notre univers.

Le document invite donc à ouvrir une exploration mathématique et à porter le domaine de définition des théories des cordes dans le cadre de la cosmologie moderne.

4 Remerciements

N'étant pas dans une position sociale me permettant de publier selon les canaux orthodoxes (faute d'un diplôme officiel en physique mathématique), je présente cette exploration sous ma seule responsabilité. J'appuie mes propos sur l'étude d'ouvrages acquis personnellement et sur des oeuvres librement accessibles en ligne. Je remercie les auteurs ayant accepté de les mettre gracieusement à disposition, en particulier les sites de dépot arXiv.org, HAL, NUMDAM, etc.

5 Bibliographie

Références

5.1 Travaux personnels préalables

[a] PERIAT, T. : Aspects mathématiques de la théorie des produits tensoriels déformés, ISBN 978-2-36923-028-1, v2, 6 juin 2021, 21 pages.

[b] PERIAT, T. : Décomposition intrinsèque des produits vectoriels déformés, ISBN 978-2-36923-036-6, v2, 14 Août 2018. Zenodo. https ://doi.org/10.5281/zenodo.2653623.

[c] PERIAT, T. : Méthode extrinsèque de décomposition des produits vectoriels déformés, ISBN 978-2-36923-006-9, v1, 19 juillet 2022, 14 pages.

[d] PERIAT, T. : Cordes élastiques classiques, ISBN 978-2-36923-139-4, v1, 28 septembre 2018, 9 pages.

5.2 Articles, cours et livres.

[01] Maxwell, J. C. : A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field ; Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, 155 : 459...512.

[02] (a) Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie ; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7. (b) Petropoulos, P. M. : Relativité générale, la gravitation en une leçon et demie, conférence X-ENS-UPS de physique, année 2017.

[03] A.D.M., the Dynamics of General Relativity ; arXiv : 0405109v1, 19 May 2004.

[04] 3 + 1 formalism and bases of numerical relativity - lecture notes ; arXiv : gr-qc/0703035v1, 06 March 2007.

[05] Purcell, E. M., Guthmann, C., Lallemand, P. : Berleley, Cours de physique, volume 2, électricité et magnétisme, Collection U, ©Librairie Armand Colin, Paris, 1973, 460 pages.

[06] Crawford, F. S. Jr., Lena, P. : Berleley, Cours de physique, volume 3, ondes, Collection U, ©Librairie Armand Colin, Paris, 1972, 603 pages.

[07] Lennuier, R., Gal, P.-Y.,Perrin, D. : Mécanique des particules, champs, Collection U, premier cycle de l'enseignement supérieur, Librairie Armand Colin, Paris, 1970, 363 pages.

[08] On the nature of filaments of the large-scale structure of the universe ; HAL id : hal-01962100, preprint submitted on 20 Dec. 2018.

[09] (a) Thirring H. : Phys. Z., **19**, 33 (1918) ; Phys. Z., **22**, 29 (1921). (b) Lense, J. and Thirring, H. : Phys. Z., **19**, 156 (1918). (c) On the gravitational effects of rotating masses : The Thirring-Lense papers ; General Relativity and Gravitation, Vol. 16, numero 8, 1984. (d) Fliessbach, T. : Allgemeine Relativitaetstheorie, 4. Auflage, Spektrum Lehrbuch, ©2003, 1998, 1995, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, ISBN 3-8274-1356-7, 343 pages.

[10] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler J. A. : Gravitation, ©by W. H, Freeman and Cie, USA, 1973. 1278 pages.

[11] Vanhove, P. : La cosmologie : un laboratoire pour la théorie des cordes ; IHES/P/09/50, 2009.

[12] Kinetic theory and hydrodynamics of cosmic strings ; arXiv :1301.1973v3 [hep-ph] 1 March 2013.

[13] Cosmic strings ; arXiv :1506.04039v2 [astro-ph.CO] 19 June 2015.

[14] Yannis Bardoux. Trous noirs dans des théories modifiées de la gravitation. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2012. Français. NNT : 2012PA112184. tel-00737357.

[15] Reeves, H. : Dernières nouvelles du cosmos (Vers la première seconde), ISBN 2-02-020571-8, ©éditions du seuil, septembre 1994.

[16] Durrer, R. : Cosmologie (d'après les notes de Desjacques, V.) Cours pour la troisième et quatrième année (deuxième cycle), Université de Genève, version révisée du 9 juillet 2005.

[17] The gravitational effect of the vaccum ; arXiv :1008.1196v1 [gr-qc] 6 August 2010.

[18] Bopp, F. W. : Kerne, Hadronen und Elementarteilchen, ISBN 3-519-03068-3, ©B. G. Teubner Stuttgart, 1989, 283 pages.